УДК 517.988.67

А. Н. Андронов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ, НИЖНЯЯ ИЗ КОТОРЫХ ЗАНИМАЕТ ПОЛУПРОСТРАНСТВО[1]

Аннотация. Рассматриваются потенциальные течения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пространственном слое с границей раздела, близкой к горизонтальной плоскости $z=0$, ответвляющиеся от основных течений со скоростями V_1 и V_2 в направлении оси Ox в случае, когда нижняя, более тяжелая, жидкость занимает полупространство. Исследуется их орбитальная устойчивость относительно возмущений той же симметрии. Применяются методы группового анализа в теории ветвления в условиях групповой инвариантности.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, капиллярно-гравитационные волны, ветвление, устойчивость, групповая симметрия.

Abstract. Potential flows of two immiscible incompressible fluids in a spatial layer with an interface close to the horizontal plane $z=0$ bifurcating from the basis flows V_1 and V_2 in Ox-direction in case the lower (the heavier) fluid occupies a half-space are considered. Their orbital stability relative to perturbations with the same symmetry is investigated. Group analysis methods in bifurcation theory under the group invariance conditions are applied.

Keywords: two-layer fluid, capillary-gravity waves, bifurcation, stability, group symmetry.

Введение

Нелинейная задача о волнах установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, описывающая плоские потенциальные течения, была решена в 20-х гг. прошлого столетия в работах А. И. Некрасова [1, 2], Т. Леви-Чивита [3] и Д. Стройка [4]. В 1928 г. Н. Е. Кочиным методами теории функций комплексного переменного исследована плоская задача о движении несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 в слое, ограниченном горизонтальными плоскостями. Линия раздела жидкостей обладает периодом и перемещается без изменения формы с постоянной горизонтальной скоростью. Было доказано существование решений задачи.

С начала XX в. развивается теория ветвления решений нелинейных уравнений, основы которой были заложены в работах А. М. Ляпунова и Э. Шмидта. Они показали, что исходная задача о ветвлении решений нелинейных интегральных уравнений эквивалентна исследованию уравнения разветвления (УР) – системе неявных аналитических функций. Метод построе-

[1] Полученные результаты поддержаны программой «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/6194) Министерства образования и науки РФ, грантом Российского фонда фундаментальных исследований – Румынская академия № 07-01-91680а.

ния УР стали называть методом Ляпунова – Шмидта. Далее теория ветвления развивалась в работах Л. Лихтенштейна, А. И. Некрасова, М. А. Красносельского, В. А. Треногина, М. М. Вайнберга [5]. Наиболее интересным и трудным является случай кратного вырождения линеаризованного оператора (так называемое многомерное ветвление), полностью не исследованный до настоящего времени. В конкретных приложениях многомерного ветвления нелинейное уравнение может иметь семейство решений. Как правило, параметры семейства имеют групповой смысл, нелинейная задача допускает непрерывную группу преобразований. Идея применения групповой симметрии в теории ветвления принадлежит В. И. Юдовичу (1967), исследовавшему вместе с авторами гидродинамические задачи стационарной и динамической бифуркации. Дальнейшим развитием симметрийной теории ветвления явился метод группового расслоения для построения редуцированного УР (Б. В. Логинов, В. А. Треногин, 1971). Доказанная в 1971 г. и опубликованная в 1973 г. теорема о наследовании [6] уравнением разветвления групповой симметрии первоначальной нелинейной задачи положила начало методам теоретико-группового моделирования теории ветвления решений нелинейных уравнений и ее прикладных аспектов. Она обосновала возможности применения методов группового анализа дифференциальных уравнений по С. Ли – Л. В. Овсянникову [7] для построения общего вида УР по допускаемой группе симметрии, оказавшихся наиболее полезными в прикладных задачах о нарушении симметрии [8].

В работе теория многомерного ветвления в условиях групповой симметрии применяется к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений, возникающей в задаче о поверхностных волнах на границе двух жидкостей, нижняя из которых занимает полупространство.

1 Постановка задачи

Рассматриваются периодические потенциальные течения с периодами $\frac{2\pi}{a} = a_1$ и $\frac{2\pi}{b} = b_1$ двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 в пространственном слое с границей раздела, близкой к горизонтальной плоскости $z = 0$, ответвляющиеся от основных течений с постоянными скоростями V_1 и V_2 в направлении оси Ox в случае, когда нижняя, более тяжелая, жидкость занимает полупространство. Потенциалы скоростей имеют вид $\Phi_j(x,y,z) = -V_j x + \varphi_j(x,y,z)$, $j = 1, 2$.

В безразмерных переменных ответвляющиеся периодические режимы описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\Delta\Phi_1 = 0,\ -\infty < z < f(x,y),$$

$$\Delta\Phi_2 = 0,\ f(x,y) < z < 1,$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0,\ z = 1,$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y},\ z = f(x,y),\ j = 1, 2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}-k_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi_1\right|^2-\frac{k_0}{2}\left|\nabla\Phi_2\right|^2+(1-k_0)F^2 f=$$

$$=\gamma F^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)\right],\ z=f(x,y),$$

с условиями убывания функций Φ_j и первых ее производных по x, y на бесконечности; $k_0=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ – отношение плотностей жидкостей; $F^2=\dfrac{hg}{V}$ – квадрат величины, обратной числу Фруда; $\gamma=\dfrac{\sigma}{\rho_1 h^2 g}$ – число Бонда.

Система (1) инвариантна относительно 2-параметрической группы сдвигов $L_\beta g(x,y)=g(x+\beta_1, y+\beta_2)$ и отражений

$$S_1: x\to -x,\ \Phi_j(x,y,z)\to -\Phi_j(-x,y,z),\ f(x,y)\to f(-x,y),$$

$$S_2: y\to -y,\ \Phi_j(x,y,z)\to \Phi_j(x,-y,z),\ f(x,y)\to f(x,-y),$$

представляющих собой группу симметрии прямоугольной решетки.

2 Построение систем разветвления

Выполняя распрямляющую границу раздела, замену переменных $\zeta=\dfrac{z-f(x,y)}{1-f(x,y)}$, $u_j(x,y,\zeta)=\Phi_j\left(x,y,\zeta(1-f(x,y))+f(x,y)\right)$ и полагая $F^2=F_{mn}^2+\varepsilon$, получаем эквивалентную (1) систему:

$$\Delta u_j=-2(\zeta-1)\left(f_x u_{j_{x\zeta}}+f_y u_{j_{y\zeta}}\right)-2fu_{j_{\zeta\zeta}}-(\zeta-1)\left(f_{xx}+f_{yy}\right)u_{j_\zeta}-$$

$$-2(\zeta-1)f\left(f_x u_{j_{x\zeta}}+f_y u_{j_{y\zeta}}\right)-(\zeta-1)^2\left(f_x^2+f_y^2\right)u_{j_{\zeta\zeta}}-3f^2 u_{j_{\zeta\zeta}}-$$

$$-(\zeta-1)\left(2\left(f_x^2+f_y^2\right)+\left(f_{xx}+f_{yy}\right)f\right)u_{j_\zeta},\ j=1,2,$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}\right)_1=0,\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}\right)_{-\infty}=0;$$

$$u_{j_\zeta}-f_x=-fu_{j_\zeta}+f_x u_{j_x}+f_y u_{j_y}-\left(f_x^2+f_y^2+f^2\right)u_{j_\zeta},\ \zeta=0,\ j=1,2, \qquad (2)$$

$$u_{1_x}-k_0 u_{2_x}+(1-k_0)F_{mn}^2 f-\gamma F_{mn}^2\Delta f=-\frac{1}{2}\left|\nabla u_1\right|^2+\frac{k_0}{2}\left|\nabla u_2\right|^2+$$

$$+\left(u_{1_\zeta}-k_0 u_{2_\zeta}\right)f_x+\left(u_{1_\zeta}-k_0 u_{2_\zeta}\right)ff_x+\left(u_{1_x}u_{1_\zeta}-k_0 u_{2_x}u_{2_\zeta}\right)f_x+$$

$$+\left(u_{1_y}u_{1_\zeta}-k_0 u_{2_y}u_{2_\zeta}\right)f_y-\gamma F_{mn}^2\left(f_x^2 f_{xx}+2f_x f_y f_{xy}+f_y^2 f_{yy}\right)+$$

$$+\varepsilon\left(-1(1-k_0)f+\gamma(f_{xx}+f_{yy}-f_x^2 f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}-f_y^2 f_{yy})\right),\ \zeta=0.$$

Система (2) может быть представлена нелинейным функциональным уравнением $BX = R(x,\varepsilon)$, $R(0,\varepsilon)\equiv 0$, $R_x(0,0)=0$, $X=(u_1,u_2,f)$ – задачей о точках бифуркации с линейным фредгольмовым [9] оператором

$$B=B_{mn}: C^{2+\alpha}\left(\Pi_0\times(-\infty,0]\right)\oplus C^{2+\alpha}\left(\Pi_0\times[0,1]\right)\oplus C^{2+\alpha}\left(\Pi_0\right)\to$$

$$\to C^{\alpha}\left(\Pi_0\times(-\infty,0]\right)\oplus C^{\alpha}\left(\Pi_0\times[0,1]\right)\oplus C^{\alpha}\left(\Pi_0\right),$$

$0<\alpha<1$, Π_0 – прямоугольник периодов в плоскости (x,y).

Представляя функцию $f(x,y)$ ее рядом Фурье

$$\sum_{m,n}\left(a_{mn}\cos max\cos nby+b_{mn}\cos max\sin nby+\right.$$

$$\left.+c_{mn}\sin max\cos nby+d_{mn}\sin max\sin nby\right)$$

в однородном уравнении $BX=0$ и решая первые шесть уравнений системы методом разделения переменных, находим

$$u_1(x,y,\zeta)=\sum_{m,n}\frac{mae^{s_{mn}\zeta}}{s_{mn}}\left(c_{mn}\cos max\cos nby+d_{mn}\cos max\sin nby-\right.$$

$$\left.-a_{mn}\sin max\cos nby-b_{mn}\sin max\sin nby\right);$$

$$u_2(x,y,\zeta)=-\sum_{m,n}\frac{ma\cosh(s_{mn}(\zeta-1))}{s_{mn}}\left(c_{mn}\cos max\cos nby+d_{mn}\cos max\sin nby-\right.$$

$$\left.-a_{mn}\sin max\cos nby-b_{mn}\sin max\sin nby\right);$$

$$s_{mn}^2=m^2a^2+n^2b^2,\ F_{mn}^2=F_0^2.$$

Тогда последнее уравнение системы (2) дает дисперсионное соотношение (ДС)

$$F_{mn}^2(1-k_0+\gamma s_{mn}^2)=\frac{m^2a^2}{s_{mn}}(1+k_0\coth s_{mn}), \tag{3}$$

справедливое для некоторых пар (m_j,n_j), $j=1,2,\ldots,\kappa$, таких, что базисные элементы подпространства нулей $N(B)$ линеаризованного оператора B имеют вид

$$\hat{\varphi}_{1j}=\left\{-v_{1j}(\zeta)\sin m_j ax\cos n_j by,\ -v_{2j}(\zeta)\sin m_j ax\cos n_j by,\ v_{3j}\cos m_j ax\cos n_j by\right\};$$

$$\hat{\varphi}_{2j}=\left\{-v_{1j}(\zeta)\sin m_j ax\sin n_j by,\ -v_{2j}(\zeta)\sin m_j ax\sin n_j by,\ v_{3j}\cos m_j ax\sin n_j by\right\};$$

$$\hat{\varphi}_{3j}=\left\{v_{1j}(\zeta)\cos m_j ax\cos n_j by,\ v_{2j}(\zeta)\cos m_j ax\cos n_j by,\ v_{3j}\sin m_j ax\cos n_j by\right\};$$

$$\widehat{\varphi}_{4j} = \left\{ v_{1j}(\zeta)\cos m_j ax \sin n_j by,\, v_{2j}(\zeta)\cos m_j ax \sin n_j by,\, v_{3j} \sin m_j ax \sin n_j by \right\},$$

где $v_{1j}(\zeta) = \dfrac{m_j a\sqrt{ab}}{\pi s_{m_j n_j}} e^{s_{m_j n_j}}$, $v_{1j}(\zeta) = -\dfrac{m_j a\sqrt{ab}\cosh(s_{m_j n_j}(\zeta - 1))}{\pi s_{m_j n_j} \sinh s_{m_j n_j}}$, $v_{3j}(\zeta) = \dfrac{\sqrt{ab}}{\pi}$,

и возможные порядки $\dim N(B)$ представляют собой суммы четверок (двумерная решетка периодичности) и двоек (одномерная решетка).

Упрощающий вычисление коэффициентов УР переход от вещественного базиса к комплексному осуществляется с помощью матрицы C с диагональными блоками C_j, если j-я решетка двумерная:

$$\varphi = C'\widehat{\varphi},\ C_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & -i & i \end{pmatrix},\ C_j^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & i \\ i & -1 & 1 & i \\ -i & -1 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

или

$$C_j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C_j^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2i & 2 \end{pmatrix},$$

если j-я решетка одномерная.

Уравнение разветвление (УР) $\widehat{t}(\eta, \varepsilon) = 0$ в вещественных переменных при переходе к комплексному базису переходит в УР в комплексных переменных $\xi_{1,2} = \eta_1 \pm i\eta_2$, $\xi_{3,4} = \eta_3 \pm i\eta_4$:

$$t_j(\xi, \varepsilon) = (C^{-1}\widehat{t})_j(C\xi, \varepsilon) = 0,\ j = 1\ldots 4.$$

Симметричность оператора B доказывается стандартными методами [10]. Те же самые методы, примененные к неоднородной системе, приводят к условиям ее разрешимости, позволяющим получить выражения для коэффициентов первого уравнения разветвления, отвечающего j-й решетке периодичности:

$$t_{\alpha;k}^{(1_j)} = -\int\limits_{\Pi_0\times(-\infty,0]} w_{\alpha;k}^{(11)} u_{1_j}\, dxdyd\zeta - \int\limits_{\Pi_0\times[0,1]} k_0 w_{\alpha;k}^{(12)} u_{2_j}\, dxdyd\zeta +$$

$$+ \int\limits_{\Pi_0} [w_{\alpha;k}^{(21)} u_{1_j}(x,y,0) - k_0 w_{\alpha;k}^{(22)} u_{2_j}(x,y,0)]dxdy + \int\limits_{\Pi_0} w_{\alpha;k}^{(3)} f_{2_j}\, dxdy,$$

где $w_{\alpha;k}^{(j)}$ – коэффициенты при $\xi^\alpha \varepsilon^k$ правых частей (2) в их разложении по $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и ε при применении метода неопределенных коэффициентов Некрасова – Назарова.

Для построения общего вида уравнения разветвления используется теория инвариантов и инвариантных многообразий С. Ли – Л. В. Овсянникова. В частности, при $n = \dim N(B) = 4$ (одна двумерная решетка периодичности)

$$t_s(\xi,\varepsilon) \equiv a_0^{(s)}(\varepsilon)\xi_s + \sum_q a_q^{(s)}(\varepsilon)\xi_s(\xi_1\xi_2)^{q_1}(\xi_3\xi_4)^{q_2} = 0,\ s = 1\ldots 4,$$

где соотношения между коэффициентами и уравнениями (групповая симметрия УР) определяются равенствами

$$(p_k t)_r(\xi,\varepsilon) = t_r(p_k\xi,\varepsilon),\ k = 1, 2, 3, \qquad (4)$$

где $p_1 = (12)(34)$, $p_2 = (13)(24)$, $p_3 = (14)(23)$.

Равенства (4) позволяют выразить все УР через первое:

$$t_1(\xi,\varepsilon) \equiv A\xi_1\varepsilon + B\xi_1^2\xi_2 + C\xi_1\xi_3\xi_4 + \ldots = 0;$$

$$A = t_{e_1;1}^{(1)},\ B = t_{2e_1+e_2;0}^{(1)},\ C = t_{e_1+e_2+e_3}^{(1)},\ e_1 = (1,0,0,0),\ldots,e_4 = (0,0,0,1);$$

$$t_k(\xi,\varepsilon) \equiv p_{k-1}t_1(\xi,\varepsilon) = 0,\ k = 2, 3, 4.$$

Вычисление коэффициентов УР проводилось с использованием системы Mathematica 6: $A = -(1 - k_0 + \gamma s_{mn}^2) < 0$, вид коэффициентов B и C громоздкий.

Симметрия задачи относительно L_β позволяет выполнить редукцию УР в вещественных переменных $\hat{t}(\eta,\varepsilon) = 0$, полагая $\eta_2 = \eta_4 = 0$. Тогда главная часть редуцированной системы принимает вид

$$A\eta_1\varepsilon + B\eta_1^3 + C\eta_1\eta_3^2 = 0;$$

$$A\eta_3\varepsilon + C\eta_1^2\eta_3 + B\eta_3^3 = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Задача (1) в окрестности точки бифуркации $F_0^2 = F_{mn}^2$ – 4-кратного собственного значения, определяемого условием (3), имеет с точностью до преобразования $y \to -y$ два 2-параметрических семейства периодических решений:

$$\left\{\Phi_1^{(1)},\Phi_2^{(1)},f^{(1)}\right\} = \left[-\frac{A}{B}(F^2 - F_{mn}^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{ma\sqrt{ab}}{\pi s_{mn}}e^{s_{mn}\zeta}\cos[ma(x+\beta_1)+nb(y+\beta_2)],\right.$$

$$-\frac{ma\sqrt{ab}\cosh(s_{mn}(\zeta-1))}{\pi s_{mn}\sinh s_{mn}}\cos[ma(x+\beta_1)+nb(y+\beta_2)],\ \frac{\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)+$$

$$\left.+nb(y+\beta_2)]\right\} + O\left(\left|F^2 - F_{mn}^2\right|\right),\ \operatorname{sign}\left(F^2 - F_{mn}^2\right) = \operatorname{sign}B,\ \zeta = \frac{z - f^{(1)}(x,y)}{1 - f^{(1)}(x,y)}; \qquad (5)$$

$$\left\{\Phi_1^{(2)},\Phi_2^{(2)},f^{(2)}\right\} = \left[-\frac{A}{B+C}(F^2 - F_{mn}^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2ma\sqrt{ab}}{\pi s_{mn}}e^{s_{mn}\zeta}\cos[ma(x+\beta_1)]\times\right.$$

$$\times\cos[nb(y+\beta_2)], -\frac{2ma\sqrt{ab}\cosh(s_{mn}(\zeta-1))}{\pi s_{mn}\sinh s_{mn}}\cos[ma(x+\beta_1)]\cos[nb(y+\beta_2)],$$

$$\left.\frac{2\sqrt{ab}}{\pi}\sin[ma(x+\beta_1)]\cos[nb(y+\beta_2)]\right\} + O\left(\left|F^2 - F_{mn}^2\right|\right), \qquad (6)$$

$$\operatorname{sign}\left(F^2 - F_{mn}^2\right) = \operatorname{sign}(B+C), \ \zeta = \frac{z - f^{(2)}(x,y)}{1 - f^{(2)}(x,y)}.$$

3 Об устойчивости решений задачи о волнах на границе раздела двух жидкостей

Орбитальная устойчивость семейств разветвляющихся решений (1) определяется [11] устойчивостью стационарных решений обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{d\eta}{dt} = t(\eta,\varepsilon)$, где $t(\eta,\varepsilon)$ – левая часть уравнения разветвления, $\varepsilon = F^2 - F_{mn}^2$. Устойчивость же последних определяется знаками собственных значений матрицы Якоби $J = \left[\frac{\partial t_i}{\partial \eta_k}\right]$ на этих решениях. Устойчивость здесь понимается по отношению к возмущениям с той же симметрией, что и ответвившееся решение. Неустойчивость по отношению к таким возмущениям означает неустойчивость вообще. Полученные для случая $n = \dim N(B) = 4$ критерии устойчивости выражены в виде неравенств, содержащих коэффициенты УР, которые зависят от нескольких параметров. Их реализация представлена в виде таблиц.

Теорема 3.1. Для того чтобы первое семейство решений (1) было орбитально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign} B = \operatorname{sign}(\tilde{B} + \tilde{C}) = -1 \ \ (\tilde{B} = B + C, \ \tilde{C} = 3B - C);$$

$$\begin{cases} \tilde{B} + \tilde{C} < 0, \\ \tilde{C} + \tilde{B} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ 0 < \frac{|\tilde{C}|}{|\tilde{B}|} < 1.$$

Действие оператора $L_{\beta_1\beta_2}$ на произвольный элемент $N(B_{mn})$ равносильно преобразованию его координат в разложении по базису подпространства нулей с помощью матрицы A_g (здесь $f_1(\beta_1,\beta_2) = \cos ma\beta_1 \cos nb\beta_2$, $f_2(\beta_1,\beta_2) = \cos ma\beta_1 \sin nb\beta_2$, $f_3(\beta_1,\beta_2) = \sin ma\beta_1 \cos nb\beta_2$, $f_4(\beta_1,\beta_2) =$ $= \sin ma\beta_1 \sin nb\beta_2$);

$$A_g = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\begin{pmatrix} f_1(\beta_1,\beta_2) & f_2(\beta_1,\beta_2) & f_3(\beta_1,\beta_2) & f_4(\beta_1,\beta_2) \\ -f_2(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) & -f_4(\beta_1,\beta_2) & f_3(\beta_1,\beta_2) \\ -f_3(\beta_1,\beta_2) & -f_4(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) & f_2(\beta_1,\beta_2) \\ f_4(\beta_1,\beta_2) & -f_3(\beta_1,\beta_2) & -f_2(\beta_1,\beta_2) & f_1(\beta_1,\beta_2) \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы A_g определяется семейство решений

$$\tilde{\eta} = A_g \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} (f_1(\beta_1,\beta_2), -f_2(\beta_1,\beta_2), -f_3(\beta_1,\beta_2), -f_4(\beta_1,\beta_2))^T \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2} +$$

$$+o(\varepsilon^{1/2}),\ \tilde{\eta}_0(\varepsilon) = (1,0,0,0)^T \left(-\frac{A}{B}\varepsilon\right)^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}),$$

где $\tilde{\eta}_0(\varepsilon)$ – решение редуцированного УР. Таким образом, устойчивость ответвляющихся решений $A_g \tilde{\eta}_0(\varepsilon)$ определяется знаками главных членов собственных значений матрицы Якоби на этом решении, которые имеют вид

$$\nu_{1,2} = 0,\ \nu_3 = -2A\varepsilon,\ \nu_4 = \frac{A\varepsilon}{B}(B - C) = \frac{2A\varepsilon}{\tilde{B} + \tilde{C}}(\tilde{C} - \tilde{B}).$$

Теорема 3.2. Для того чтобы второе семейство решений (1) было орбитально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\operatorname{sign}\varepsilon = \operatorname{sign}(B + C) = \operatorname{sign}\tilde{B} = -1;$$

$$0 < \frac{|\tilde{B}|}{|\tilde{C}|} < 1.$$

Решение редуцированного УР:

$$\tilde{\eta}_0(\varepsilon) = (1,0,1,0)^T \left(-\frac{A}{B + C}\varepsilon\right)^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}),$$

устойчивость определяется знаками главных членов собственных значений матрицы Якоби на этом решении, которые имеют вид

$$\nu_{1,2} = 0,\ \nu_3 = -2A\varepsilon,\ \nu_4 = \frac{2A\varepsilon}{B + C}(C - B).$$

Придавая значения параметрам $n, b, q = \dfrac{ma}{nb}$, мы определяем $\dfrac{|\tilde{C}|}{|\tilde{B}|}$. Результаты (для $k_0 = 0{,}8$) первой группы решений представлены в табл. 1, где решения (5) устойчивы, а решения (6) неустойчивы.

Таблица 1

n	B	q	$\lvert\tilde{C}\rvert / \lvert\tilde{B}\rvert$	n	b	q	$\lvert\tilde{C}\rvert / \lvert\tilde{B}\rvert$
1	2	3	4	5	6	7	8
1,000	1,000	0,4500	0,900557655	2,000	2,000	0,4000	0,322462678
1,000	1,000	0,5000	0,057744454	2,000	2,000	0,4500	0,287869724
1,000	1,000	0,5500	0,721048916	2,000	2,000	0,5000	0,213069993
2,000	1,000	0,4000	0,905174164	2,000	2,000	0,5500	0,311566767
2,000	1,000	0,4500	0,482613624	3,000	3,000	0,1500	0,854370203
2,000	1,000	0,5000	0,020687025	3,000	3,000	0,2000	0,888436527

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
2,000	1,000	0,5500	0,641085992	3,000	3,000	0,2500	0,906207058
2,000	2,000	0,1500	0,511768485	3,000	3,000	0,3000	0,915218725
2,000	2,000	0,2000	0,076154192	3,000	3,000	0,3500	0,917925930
2,000	2,000	0,2500	0,140149238	3,000	3,000	0,4000	0,914252870
2,000	2,000	0,3000	0,256014710	3,000	3,000	0,4500	0,900971896
2,000	2,000	0,3500	0,312168742	3,000	3,000	0,5000	0,865188101

Результаты для второй группы решений содержатся в табл. 2, где решения (6) устойчивы, а решения (5) неустойчивы.

Таблица 2

n	B	q	$\lvert\tilde{B}\rvert / \lvert\tilde{C}\rvert$	n	b	q	$\lvert\tilde{B}\rvert / \lvert\tilde{C}\rvert$
1,000	1,000	0,3000	0,023310436	2,000	1,000	0,2000	0,229482091
1,000	1,000	0,3500	0,157844790	2,000	1,000	0,2500	0,361195193
1,000	1,000	0,4000	0,399998387	2,000	1,000	0,3000	0,526581055
2,000	1,000	0,1000	0,046064575	2,000	2,000	0,0500	0,138166358
2,000	1,000	0,1500	0,125067544	2,000	2,000	0,1000	0,614013465

Список литературы

1. **Некрасов, А. И.** О волнах установившегося вид / А. И. Некрасов // Известия Ивановского политехнического института. – 1922. – № 6. – С. 155–171.
2. **Некрасов, А. И.** Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости / А. И. Некрасов. – М. : Изд-во АН СССР, 1951. – 96 с.
3. **Levi-Civita, T.** Détermination rigoureuse des ondes permanents d'ampleur finie / T. Levi-Civita // Math. Annallen. – 1925. – № 93. – P. 264–324.
4. **Struik, D. J.** Détermination rigoureuse des ondes irrotationelles périodiques / D. J. Struik // Math. Annallen. – 1926. – № 95. – P. 595–634.
5. **Вайнберг, М. М.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В.А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 524 с.
6. **Логинов, Б. В.** Об использовании групповой инвариантности в теории ветвления / Б. В. Логинов, В. А. Треногин // Дифференциальные уравнения. – 1975. – № 8. – С. 1518–1521.
7. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978.
8. **Логинов, Б. В.** Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия / Б. В. Логинов // Вестник Самарского государственного университета. – 1998. – № 4 (10). – С. 15–70.
9. **Агранович, М. С.** Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях / М. С. Агранович // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М. : ВИНИТИ, 1990 – Вып. 63. – С. 5–129.
10. **Наймарк, М. А.** Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969.
11. **Loginov, B. V.** Generalized Jordan Structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. / B. V. Loginov, Yu. B. Rousak // Nonlinear Analysis. – TMA. – 1991. – V. 17. – № 3. – P. 219–231.

Андронов Артем Николаевич
аспирант, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева (г. Саранск)

E-mail: arbox@inbox.ru

Andronov Artem Nikolaevich
Post graduate student, Mordovia State University named after N. P. Ogarev (Saransk)

УДК 517.988.67

Андронов, А. Н.

Об устойчивости разветвляющихся решений задачи о поверхностных волнах на горизонтальной границе раздела двух жидкостей, нижняя из которых занимает полупространство / А. Н. Андронов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3 (11). – С. 12–21.